نظریه اطلاعات کوانتومی ۱ ترم پاییز ۱۳۹۱-۱۳۹۲

مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین‌زاده گوهری

نویسنده: پیام دلگشا

# جلسه ۹

---

در طول چند جلسه‌ی آینده به بررسی اصول مکانیک کوانتومی می‌پردازیم. برای توصیف پایه‌ای یک نظریه‌ی فیزیکی باید ابتدا به ساختار چهار مورد زیر در آن نظریه پرداخت:

۱. فضای حالات

۲. اندازه‌گیری

۳. تحول زمانی

۴. فضای حالت سیستم‌های ترکیبی

به طور خلاصه منظور از فضای حالات مجموعه‌ی حالاتی است که یک سیستم فیزیکی ممکن است در آن قرار بگیرد. مثلا وضعیت یک توپ در اتاق را می‌توان با پارامترهای مکان و تکانه توصیف کرد که با در نظر گرفتی سه بعدی بودن سیستم روی هم می‌شود $6$ پارامتر. به عبارت دیگر فضای حالات یک توپ (در فیزیک کلاسیک) برابر فضای $6$ بعدی حقیقی است. مثال دیگر مدارهای الکتریکی هستند که برای توصیف آنها از پارامترهای ولتاژ و جریان استفاده می‌شود. برای تشخیص اینکه سیستم در یک لحظه از زمان در چه حالت یا چه وضعیتی است باید اندازه‌گیری کنیم. از طرفی حالت یک سیستم در طول زمان تغییر می‌کند پس در یک نظریه‌ی فیزیکی نیاز به بررسی تحول زمانی یک سیستم داریم. زمانی که یک سیستم از چند زیر سیستم تشکیل شده باشد و این زیرسیستم‌ها با یکدیگر برهم‌کنش داشته باشند، باید بتوانیم سیستم‌های ترکیبی را مطالعه کنیم.

در واقع با کمی دقت متوجه می‌شویم که اصل اول و دوم در واقع یک چیز هستند؛ اندازه‌گیری صرفا ابزاری است برای فهمیدن حالت یک سیستم و در نتیجه فضای حالات آن. در مکانیک کلاسیک معمولا موارد اول و سوم بررسی می‌شوند (تعریف وضعیت یک سیستم بر حسب پارامترهای مکان و تکانه و سپس بیان معادلات حرکت) زیرا موارد دوم و چهارم در مکانیک کلاسیک بدیهی هستند.

در ادامه هر یک از این چهار مورد را برای نظریه‌ی فیزیک کوانتمی توضیح می‌دهیم.

## ۱ اصل اول فیزیک کوانتمی: فضای حالات

همان طور که گفتیم، فضای حالت شامل تمام حالت‌هایی است که سیستم ما ممکن است در آنها قرار بگیرد. ساده‌ترین مثال یک سیستم فیزیکی کلاسیک، یک بیت است که فضای حالت متناظر با آن مجموعه‌ی دو عضوی $\{0,1\}$ است. در مکانیک کوانتومی فضای حالت به صورت زیر توصیف می‌شود.

**اصل** (فضای حالت). به هر سیستم فیزیکی یک «فضای هیلبرت»[۱] متناظر است. حالت[۲] سیستم (در هر لحظه از زمان) با یک بردار با طول واحد در فضای هیلبرت مشخص می شود. دو بردار که ضریبی از یکدیگر باشند یک حالت فیزیکی را بیان می کنند.

از آنجاکه ما در این درس فقط فضاهای با بعد متناهی را بررسی می‌کنیم، منظورمان از فضای هیلبرت، فضای برداری متناهی بعدی مجهز به ضرب داخلی است. همچنین فضاهای برداری‌ای که در نظر می‌گیریم همگی روی مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ هستند. بنابراین یک بیت یک سیستم کوانتومی محسوب نمی‌شود. ساده‌ترین مثال یک سیستم کوانتومی فضای یک بعدی $\mathbb{C}$ به عنوان میدان برداری روی $\mathbb{C}$ است. اما از آنجاکه تمام بردارها در این فضا ضریبی از یکدیگر هستند، بنابراین عملا این فضا یک حالت بیشتر ندارد و فایده‌ی کاربردی ندارد. ساده‌ترین فضایی که فایده‌ی کاربردی دارد، فضای دوبعدی است:

**مثال ۱.** کیوبیت[۳] یک سیستم کوانتمی است که فضای هیلبرت متناظر آن دو بعدی باشد، یعنی $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. اگر پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ را به صورت

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

در نظر بگیریم، هر بردار $|v\rangle \in \mathcal{H}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی $a|0\rangle + b|1\rangle$ نوشت که $a, b \in \mathbb{C}$. اما چون فرض کرده‌ایم که حالت سیستم برداری به طول واحد است، باید داشته باشیم $|a|^2 + |b|^2 = 1$. از آنجاکه دو بردار که ضریبی از هم باشند، یک حالت محسوب می‌شوند، تمام بردارهای زیر یک حالت کوانتومی را مشخص می‌کنند:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \sim \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \sim \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{i\theta}\\e^{i\theta}\end{pmatrix}.$$

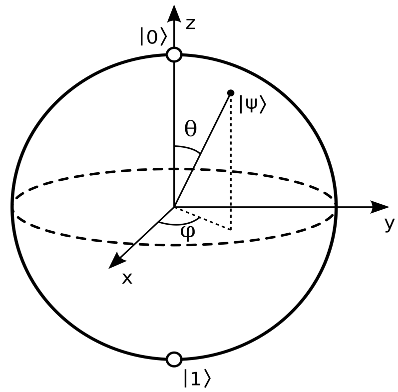
همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، از آنجاکه ضرب کردن $e^{i\theta}$ نرم بردار را تغییر نمی‌دهد، حالت را هم عوض نمی‌کند. به چنین پارامتری، فاز سراسری[۴] گفته می‌شود.

**مثال ۲.** بردار حالت دلخواهی از یک کیوبیت را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه فاز سراسری اهمیت ندارد، همواره می‌توان ضریب $|0\rangle$ را حقیقی در نظر گرفت. پس حالت یک کیوبیت را می‌توان با دو پارامتر آزاد به شکل زیر نمایش داد:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|0\rangle \;+\; e^{i\phi}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|1\rangle = \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|0\rangle \;+\; (\cos\phi + i\sin\phi)\,\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

که در آن $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \phi < 2\pi$. به عنوان تمرین نشان دهید که این نحوه بیان حالت یک کیوبیت یکتا است مگر اینکه بردار حالت $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ باشد. به این نمایش که شبیه نمایش در مختصات کروی است، نمایش کره ای بلوخ [۵] از یک کیوبیت گفته می‌شود. شکل ۱ تصویر هندسی این نمایش را نشان می‌دهد. حالات یک کیوبیت متناظر با نقاط روی پوسته این کره هستند.

---
[۱] Hilbert Space
[۲] State
[۳] Qubit
[۴] Global Phase
[۵] Bloch sphere




شکل ۱: نمایش کره ای بلوخ از یک کیوبیت.

همان طور که گفته شد، یک کیوبیت در هر لحظه از زمان در یکی از حالات ممکن قرار دارد، بنابراین ممکن است در لحظه‌ی $t_1$ در حالت $|0\rangle$ باشد، در لحظه‌ی $t_2$ حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ را اختیار کند و در لحظه‌ی $t_3$ به حالت $\cos\theta|0\rangle + i\sin\theta|1\rangle$ برود.

معمولا فضای هیلبرت متناظر با فضای حالت را با $\mathcal{H}$ و بعد آن را با $d = \dim(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم. چنین سیستمی یک کیودیت[۶] نامیده می‌شود. برای این فضا پایه‌ی متعامد یکه‌ی استاندارد را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d-1\rangle\}.$$

بنابراین یک بردار حالت متناظر با یک کیودیت به صورت

$$\alpha_0|0\rangle + \cdots + \alpha_{d-1}|d-1\rangle,$$

است که $\alpha_i$ها اعداد مختلط هستند و چون باید نرم بردار واحد باشد، $|\alpha_0|^2 + \cdots + |\alpha_{d-1}|^2 = 1$.

## ۲ اصل دوم فیزیک کوانتمی: اندازه‌گیری

**اصل** (اندازه‌گیری). اندازه‌گیری بر روی یک سیستم با فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با عملگرهای خطی

$$M_1, M_2, \dots, M_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

مشخص می‌شود به طوری که

$$\sum_{i=1}^{k} M_i^\dagger M_i = I_{\mathcal{H}}, \qquad (۱)$$

[۶] Qudit

که در آن $I_{\mathcal{H}}$ عملگر همانی روی $\mathcal{H}$ است. اگر حالت سیستم $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ باشد، حاصل اندازه‌گیری با «احتمال» $p_i = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle$ برابر $i$ می‌شود. به علاوه اگر حاصل اندازه گیری $1 \leq i \leq k$ باشد ، حالت سیستم به

$$|\psi'\rangle = \frac{M_i|\psi\rangle}{\|M_i|\psi\rangle\|} \tag{۲}$$

«تغییر»[۷] می کند.

این تعریف از اندازه‌گیری با تصوری که ما تا به حال از اندازه‌گیری داشته‌ایم متفاوت است. مثال زیر را برای اندازه‌گیری کلاسیک در نظر بگیرید: فرض کنید یک ماده در ظرفی قرار دارد که ممکن است در سه حالت جامد، مایع یا گاز باشد. بنابراین فضای حالت (کلاسیک و نه کوانتومی) ما مجموعه‌ی {گاز ,مایع ,جامد} است. در دنیای کلاسیک وقتی اندازه‌گیری انجام می‌شود، حاصل اندازه‌گیری یکی از این سه حالت است، اگر دقت وسیله‌ی اندازه‌گیری ما بی‌نهایت باشد و هیچ نویزی هم وجود نداشته باشد، نتیجه‌ی آزمایش به احتمال یک همان حالت واقعی ماده‌ی ما است. در ضمن اندازه‌گیری ما هیچ تاثیری بر وضعیت سیستم نخواهد داشت، یعنی بعد از انجام آزمایش حالت سیستم همان است که قبل از آزمایش بود.

اما این اندازه‌گیری در دنیای کوانتومی به صورت زیر خواهد بود[۸] که سه عملگر $M_{\text{گاز}}, M_{\text{مایع}}, M_{\text{جامد}}$ داریم و بعد از اندازه‌گیری، مثلا با احتمال $1/2$ نتیجه‌ی آزمایش جامد، به احتمال $1/4$ نتیجه‌ی آزمایش مایع و به احتمال $1/4$ نتیجه‌ی آزمایش گاز خواهد بود. این ماهیت تصادفی به هیچ وجه مربوط به دقت اندازه‌گیری ما یا نویز موجود نیست، بلکه خود اندازه‌گیری ماهیت تصادفی دارد. عجیب‌تر از این موضوع این است که بعد از اندازه‌گیری حالت سیستم تغییر می‌کند و این تغییر به نتیجه‌ی آزمایش وابسته است.

همان طور که در تعریف مشخص شده، احتمال اینکه نتیجه‌ی آزمایش $i$ باشد در صورتی که حالت سیستم $|\psi\rangle$ است برابر است با $p_i = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle$. توجه کنید که می‌دانیم $M_i^\dagger M_i$ ماتریسی نیمه مثبت معین است بنابراین $p_i \geq 0$. به علاوه برای اینکه $p_i$ها یک توزیع احتمال درست کنند، باید جمعشان هم یک شود. با توجه به رابطه‌ی (۱) (که به آن شرط completeness گفته می‌شود) و اینکه $|\psi\rangle$ برداری با طول واحد است داریم:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \langle\psi| \left(\sum_{i=1}^{k} M_i^\dagger M_i\right) |\psi\rangle = \langle\psi|I_{\mathcal{H}}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

رابطه‌ی (۲) نیز می‌گوید حالت سیستم بعد از آزمایش در صورتی که نتیجه‌ی آزمایش $i$ باشد صرفا با اعمال عملگر $M_i$ روی حالت سیستم بدست می‌آید. عبارت $\|M_i|\psi\rangle\|$ در مخرج کسر صرفا برای این است که حالت سیستم باید طول واحد داشته باشد.

**مثال ۳** (اندازه‌گیری یک کیوبیت). همان طور که قبلا گفته شد، فضای حالت یک کیوبیت دو بعدی است. عملگرهای خطی $M_0, M_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$M_0 = |0\rangle\langle 0|, \qquad M_1 = |1\rangle\langle 1|.$$

[۷] Collapse

[۸] دقت کنید این صرفا یک مثال برای درک بهتر مطلب است و حالت یک سیستم کوانتومی نمی‌تواند {گاز ,مایع ,جامد} باشد چون فضای برداری نیست.

درواقع $M_0$ نگاشت تصویر در راستای $|0\rangle$ و $M_1$ نگاشت تصویر در راستای $|1\rangle$ است. در این صورت با توجه به خواص نگاشت تصویر $M_i^\dagger = M_i$ و $M_i^2 = M_i$ داریم $M_i^\dagger M_i = M_i$. در نتیجه از آنجا که $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه تشکیل می‌دهد داریم

$$M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I_{\mathcal{H}},$$

و لذا $\{M_0, M_1\}$ یک اندازه‌گیری است. برای $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ داریم

$$p_0 = \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle = |\langle\psi|0\rangle|^2 = |a|^2,$$
$$p_1 = |b|^2.$$

حال اگر حاصل اندازه گیری $0$ باشد حالت سیستم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{M_0|\psi\rangle}{\|M_0|\psi\rangle\|} = \frac{|0\rangle\langle 0|\left(a|0\rangle + b|1\rangle\right)}{\||0\rangle\langle 0|\left(a|0\rangle + b|1\rangle\right)\|} = \frac{a|0\rangle}{\|a|0\rangle\|} = |0\rangle$$

و اگر حاصل اندازه گیری $1$ باشد سیستم به $|1\rangle$ تغییر پیدا می‌کند. در واقع در این اندازه‌گیری بردار حالت در یکی از دو راستای استاندارد تصویر می‌شود و آن راستایی که بردار مولفه‌ی بزرگتری در آن دارد با احتمال بیشتری نتیجه‌ی آزمایش خواهد بود.

**مثال ۴.** در مثال قبل آزمایش‌ها متناظر با تصویر در راستاهای استاندارد بودند. در این مثال می‌خواهیم تصویر در راستای دو بردار متعامد یکه‌ی

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right),$$

را بررسی کنیم. نگاشت‌های تصویر در این دو راستا را در نظر بگیرید:

$$N_+ = |+\rangle\langle +| \qquad N_- = |-\rangle\langle -|,$$

دقت کنید چون $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ متعامد یکه است و $N_+$ و $N_-$ نگاشت‌های تصویری هستند، مشابه مثال قبل $N_+^\dagger N_+ + N_-^\dagger N_- = I$ و شرایط اندازه‌گیری برقرار است.[۹] برای بردار حالت $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ داریم

$$p_+ = \langle\psi|N_+^\dagger N_+|\psi\rangle = |\langle +|\psi\rangle|^2 = \frac{|a+b|^2}{2},$$
$$p_- = \langle\psi|N_-^\dagger N_-|\psi\rangle = |\langle -|\psi\rangle|^2 = \frac{|a-b|^2}{2}.$$

اگر نتیجه‌ی آزمایش $+$ باشد سیستم به حالت

$$\frac{|+\rangle\langle +||\psi\rangle}{\||+\rangle\langle +||\psi\rangle\|} = |+\rangle$$

تغییر حالت می‌دهد. همچنین اگر نتیجه‌ی آزمایش $-$ باشد، سیستم به $|-\rangle$ تغییر حالت می‌دهد.

[۹] دقت کنید که در این مثال به جای اندیس عددی $1 \leq i \leq k$ از اندیس $+$ و $-$ استفاده شده است.

در مثال‌هایی که بررسی کردیم، نگاشت‌ها از نوع تصویری بودند، اما در حالت کلی لزومی ندارد چنین باشد؛ مثال زیر را در نظر بگیرید:

**مثال ۵.** اگر $|+\rangle, |-\rangle$ بردارهای تعریف شده در مثال‌های قبلی باشند، تعریف کنید:

$$S_0 = |+\rangle\langle 0| \qquad S_1 = |-\rangle\langle 1|,$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که شرط (۱) برای این عملگرها برقرار است:

$$S_0^\dagger S_0 = |0\rangle\langle +|\,|+\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0|$$
$$S_1^\dagger S_1 = |1\rangle\langle -|\,|-\rangle\langle 1| = |1\rangle\langle 1|$$

بنابراین:

$$S_0^\dagger S_0 + S_1^\dagger S_1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I,$$

و شرط برقرار است. دقت کنید این عبارت‌ها عینا مانند نتایج مثال ۳ هستند، یعنی $S_i^\dagger S_i = M_i^\dagger M_i$. بنابراین احتمال‌ها مانند همانجا خواهند بود. یعنی اگر حالت سیستم $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ باشد، $p_0 = |a|^2$ و $p_1 = |b|^2$. حال اگر نتیجه‌ی آزمایش $0$ باشد، حالت جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{S_0|\psi\rangle}{\|S_0|\psi\rangle\|} = \frac{a|+\rangle}{|a|} = |+\rangle,$$

و به طور مشابه اگر نتیجه‌ی آزمایش $1$ باشد سیستم به حالت $|-\rangle$ خواهد رفت.

همان طور که مشاهده کردیم، در این مثال احتمال‌ها دقیقا مشابه مثال ۳ بودند اما تغییر حالت‌ها متفاوت بودند. دلیل این است که با توجه به تعریف، احتمال $p_i$ صرفا به $M_i^\dagger M_i$ بستگی دارد و در حالت کلی ممکن است برای دو عملگر متفاوت $T \neq S$ داشته باشیم $T^\dagger T = S^\dagger S$. در جلسه‌ی بعدی بیشتر به این موضوع خواهیم پرداخت.

**تمرین ۶.** با مراجعه به قضیه‌ی تجزیه‌ی مقادیر تکین نشان دهید اگر برای دو عملگر $T, S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ داشته باشیم $T^\dagger T = S^\dagger S$ آنگاه مقادیر تکین $S$ و $T$ یکی هستند.

در مثال بعدی موضوع اندازه‌گیری تصویری را که در مثال‌های قبلی برای یک پایه‌ی متعامد یکه در فضای دوبعدی یک کیوبیت بررسی کردیم، در حالت کلی بررسی می‌کنیم. در ادامه‌ی درس از این نوع اندازه‌گیری استفاده‌های زیادی خواهیم کرد.

**مثال ۷** (اندازه‌گیری تصویری). اگر عملگرهای اندازه‌گیری $M_i$ دارای این ویژگی باشند که $M_i^\dagger = M_i$ و $M_i^2 = M_i$ یا به عبارتی تصویر عمود[۱۰] باشند و به علاوه شرط

$$\sum_{i=1}^{k} M_i^\dagger M_i = \sum_{i=1}^{k} M_i = I$$

نیز برقرار باشد می‌توان اندازه‌گیری با استفاده از آنها را در نظر گرفت. در این صورت احتمال $p_i$ خواهد بود با:

$$p_i = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = \langle\psi|M_i|\psi\rangle.$$

[۱۰] orthogonal projection

**تمرین ۸.** برای عملگرهای تصویری $M_i$ در مثال فوق نشان دهید زیر فضاهای $W_1, \ldots W_k$ وجود دارند که $M_i$ تصویری متعامد روی زیرفضای $W_i$ است و به علاوه این زیرفضاها بر هم عمود هستند و کل فضا را می‌پوشانند، یعنی برای هر $1 \leq i \neq j \leq k$ داریم $W_i \perp W_j$ و به علاوه برای بردار دلخواه $|v\rangle \in \mathcal{H}$ داریم $|v\rangle = \sum_{i=1}^{k} |v\rangle_{W_i}$ که در آن $|v\rangle_{W_i}$ تصویر عمود بردار $|v\rangle$ روی زیرفضای $W_i$ است. همچنین نتیجه بگیرید که $M_iM_j = 0$ برای $i \neq j$.

**مثال ۹** (اندازه‌گیری در یک پایه‌ی متعامد یکه). یک حالت خاص از اندازه‌گیری تصویری این است که هریک از زیرفضاهای تصویری بعد یک داشته باشند. بنابراین پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|v_0\rangle, \ldots, |v_{d-1}\rangle\}$ داریم که $M_i = |v_i\rangle\langle v_i|$ عملگر تصویر روی $|v_i\rangle$ است. چون $|v_i\rangle$ها یک پایه متعامد یکه برای کل فضا تشکیل می‌دهند

$$\sum M_i = \sum |v_i\rangle\langle v_i| = I,$$

و شرط کامل بودن *completeness* اندازه‌گیری برقرار است و در نتیجه یک اندازه‌گیری داریم. به چنین اندازه‌گیری، اندازه‌گیری در یک پایه‌ی متعامد یکه می‌گویند. محاسبه احتمال تغییر حالت سیستم برای اندازه گیری در یک پایه‌ی متعامد یکه از لحاظ هندسی آسان است. اگر سیستم در حالت دلخواه $|\psi\rangle$ باشد، در این صورت احتمال اینکه نتیجه آزمایش $i$ باشد برابر است با قدر مطلق ضرب داخلی بردار $|\psi\rangle$ و بردار $|v_i\rangle$:

$$p(i) = \langle\psi|M_i|\psi\rangle = \langle\psi|v_i\rangle\langle v_i|\psi\rangle = (\langle v_i|\psi\rangle)^*\langle v_i|\psi\rangle = |\langle v_i|\psi\rangle|^2.$$

به طور خاص اگر بردار $|\psi\rangle$ بر بردار $|v_i\rangle$ عمود باشد، احتمال $p(i)$ برابر صفر خواهد بود، و اگر این دو بردار در راستای هم باشند، این احتمال برابر یک خواهد بود. اگر بردار $|\psi\rangle$ را در پایه متعامد یکه $|v_i\rangle$ تجزیه کنیم، قدرمطلق ضرایب تجزیه به توان دو همان احتمالات هستند، که البته جمع آنها برابر یک است چون طول بردار $|\psi\rangle$ برابر یک است.

در ادامه از این نوع اندازه‌گیری زیاد استفاده خواهیم نمود.

**تمرین ۱۰.** حالت $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle$ را در نظر بگیرید. جهت تخمین $\theta$، این حالت را در پایه $|+\rangle$ و $|-\rangle$ که به شکل زیر تعریف شده‌اند اندازه گیری می‌کنیم. بر حسب $\theta$ احتمال اینکه حاصل اندازه‌گیری $|+\rangle$ باشد را بیابید.

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

**تمرین ۱۱.** فرض کنید که تعداد زیادی (بینهایت) کیوبیت در وضعیت نامعلوم $|\eta\rangle$ داریم. نشان دهید با اندازه‌گیری این کیوبیت‌ها در پایه‌های دلخواه می‌توان حالت کیوبیت را یافت.

**تمرین ۱۲.** فرض کنید که دستگاهی ساخته‌اید که هدفش تولید یک کیوبیت در حالت خاص $|\psi\rangle$ است. در عمل این دستگاه کیوبیتی در حالت $|\eta\rangle$ برای شما تولید می‌کند که ممکن است با $|\psi\rangle$ مساوی نباشد. هدف شما تصمیم‌گیری در مورد این موضوع است که آیا $|\eta\rangle = |\psi\rangle$ یا نه؟ چه راهی برای این کار پیشنهاد می‌کنید و احتمال خطای تصمیم‌گیری را چگونه محاسبه می‌کنید؟

**تمرین ۱۳.** فرض کنید که دستگاهی ساخته‌اید که هدفش تولید سیستم کوانتمی با حالت خاص $|\psi\rangle$ است. اما در عمل این دستگاه سیستم کوانتمی در حالت نامعلوم $|\eta\rangle$ برای شما تولید می‌کند. هدف شما تخمین فاصله‌ی میان $|\psi\rangle$ و $|\eta\rangle$، یعنی $\||\psi\rangle - |\eta\rangle\|$ است. برای این کار می‌توانید $n$ نسخه یکسان از سیستم‌های کوانتمی در حالت $|\eta\rangle$ را از دستگاه بگیرید و روی آنها آزمایش انجام دهید. برای این کار این سیستم‌های کوانتمی را با استفاده از عملگرهای

$$M_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$M_1 = I - |\psi\rangle\langle\psi|$$

اندازه‌گیری می‌کنیم. با توجه به نتیجه‌ی مشاهده بهترین تخمین‌گر (که متوسط احتمال خطایش کمترین باشد) را برای $\||\psi\rangle - |\eta\rangle\|^2$ وقتی که به نمایش کره ای بلوخ این دو بردار نگاه کنیم بیابید. متوسط واریانس این تخمین گر را بر حسب $n$ بیابید.

## آ حل گزیده‌ای از تمرین‌ها

**تمرین ۸** ابتدا اثبات می‌کنیم که برای $i \neq j$ داریم $M_iM_j = 0$. اگر طرفین رابطه‌ی کامل بودن را در $M_i$ ضرب کنیم داریم:

$$\sum_{j=1}^{k} M_jM_i = M_i.$$

چون $M_i^2 = M_i$ بنابراین:

$$\sum_{j\neq i} M_jM_i = 0,$$

و اگر از طرفین trace بگیریم داریم:

$$\sum_{j\neq i} \mathrm{tr}(M_jM_i) = 0, \tag{۳}$$

اما بنابر نتیجه‌ی تمرین ۴۳ جلسه‌ی ششم چون $M_i$ ها هرمیتی هستند و مقادیر ویژه‌ی آنها صفر یا یک است، بنابراین مثبت نیمه معین هستند و بنابراین $\mathrm{tr}(M_jM_i) \geq 0$ و در نتیجه (۳) نتیجه می‌دهد که $\mathrm{tr}(M_jM_i) = 0$ برای $i \neq j$. لذا تمرین ۴۴ جلسه‌ی ششم نتیجه می‌هد $M_iM_j = 0, i \neq j$. حال ادعا می‌کنیم که زیرفضاهای تصویری بر هم عمود هستند. اگر $W_i$ زیرفضای تصویر متناظر با $M_i$ باشد، داریم:

$$W_i = \{M_i|v\rangle : |v\rangle \in \mathcal{H}\},$$

بنابراین برای این که نشان دهیم $W_i \perp W_j$ برای $i \neq j$ کافی است نشان دهیم برای $|v\rangle, |w\rangle \in \mathcal{H}$ داریم $(M_i|v\rangle, M_j|w\rangle) = 0$. توجه کنید که از آنجاکه $M_iM_j = 0$ بنابراین

$$(M_i|v\rangle, M_j|w\rangle) = \langle v|M_i^\dagger M_j|w\rangle = 0.$$

به علاوه برای بردار دلخواه $|v\rangle \in \mathcal{H}$ داریم

$$|v\rangle = I|v\rangle = \sum_{i=1}^{k} M_i|v\rangle = \sum_{i=1}^{k} |v\rangle_{W_i}.$$

بنابراین $M_i$ ها تصویر روی زیرفضاهای عمود بر هم هستند که کل فضا را می‌پوشانند. در اصطلاح به چنین عملی تجزیه[۱۱] کردن کل فضا گفته می‌شود.

**تمرین ۱۱** بر اساس نمایش بلوخ حالت یک کیوبیت را می‌توان با دو پارامتر آزاد به شکل زیر نمایش داد:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle \,+\, e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle.$$

در صورتی که در پایه استاندارد این کیوبیت را اندازه گیری کنیم، احتمال صفر آمدن برابر خواهد بود با $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$. پس اگر تعداد زیادی از این کیوبیت‌ها را در این پایه اندازه گیری کنیم و نسبت مشاهدات صفر را به کل مشاهدات پیدا کنیم از روی آن می‌توان $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$ را تخمین زد. از آنجایی که $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ کوسینوس این زاویه همواره نامنفی بوده و از طریق مشاهده در این پایه می‌توان به صورت یکتا $\theta$ را پیدا کرد. جهت یافتن $\phi$ کافی است که این کیوبیت را در یک پایه‌ی دلخواه دیگر اندازه گیری کنیم و با معادلات بدست آمده $\phi$ را پیدا کنیم.[۱۲]

**تمرین ۱۲** فرض کنید که بردار یکه عمود به $|\psi\rangle$ را $|\psi^\perp\rangle$ بنامیم. کیوبیت ها را در پایه متعامد یکه ای $|\psi\rangle$ و $|\psi^\perp\rangle$ اندازه گیری می‌کنیم:

$$M_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$M_1 = |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|$$

اگر حالت کیوبیت $|\psi\rangle$ باشد حاصل اندازه‌گیری باید همواره $M_0$ باشد. پس آزمایش می‌تواند اینگونه باشد که $n$ کیوبیت را در پایه‌های فوق اندازه گیری کنیم. اگر جواب همواره صفر بود، اعلام می‌کنیم که حالت کیوبیت $|\psi\rangle$ است. اما اگر حتی در یک آزمایش $M_1$ گرفتیم، اعلام می‌کنیم که حالت کیوبیت $|\psi\rangle$ نیست. خطا زمانی رخ می‌دهد که حالت کیوبیت $|\eta\rangle \neq |\psi\rangle$ باشد و ما همواره صفر گرفته باشیم. احتمال این رخداد برابر است با $(|\langle\psi|\eta\rangle|^2)^n$.

**تمرین ۱۳** فرض کنید که نمایش بلوخ دو کیوبیت

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)|0\rangle \,+\, e^{i\phi_1}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)|1\rangle$$

و

$$|\eta\rangle = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)|0\rangle \,+\, e^{i\phi_2}\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)|1\rangle$$

باشند. مقادیر $\theta_2$ و $\phi_2$ نامعلوم بوده ولی $\theta_1$ و $\phi_1$ مشخص و دانسته است.

[۱۱] decomposition

[۱۲] به مسأله‌ی یافتن حالت یک کیوبیت با توجه به مشاهداتی که از روی اندازه‌گیری‌ها بدست می‌آید quantum state tomography می‌گویند.

هر آزمایش روی هر کیوبیت با احتمال

$$p = |\langle\psi|\eta\rangle|^2 = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)^2$$

برابر صفر و با احتمال $1-p$ برابر یک خواهد شد. دقت کنید که

$$\||\psi\rangle - |\eta\rangle\|^2 = (\langle\psi| - \langle\eta|)(|\psi\rangle - |\eta\rangle) = 2 - \langle\psi|\eta\rangle - \langle\eta|\psi\rangle = 2 - 2Re\{\langle\psi|\eta\rangle\}$$

داریم

$$\langle\psi|\eta\rangle = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + e^{i\phi_2 - i\phi_1}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

در این صورت

$$\||\psi\rangle - |\eta\rangle\|^2 = 2 - 2\Bigg(\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\cos(\phi_2 - \phi_1)\Bigg)$$

دقت کنید که آزمایش ما تنها به ما اطلاعاتی در مورد $\theta_2$ میدهد و نه در مورد $\phi_2$. در صورتی که فرض کنیم که $\phi_2$ توزیع خاصی، مثلا یکنواخت روی $[-\pi, \pi]$، دارد می‌توانیم به سوال بالا در مورد تخمین پاسخ دهیم. در صورتی که توزیع $\phi_2$ یکنواخت روی $[-\pi, \pi]$ باشد، مستقل از اینکه $\theta_2$ چه باشد، امید ریاضی $\cos(\phi_2 - \phi_1)$ صفر خواهد بود. پس

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Bigg[\||\psi\rangle - |\eta\rangle\|^2\Bigg|\text{Observations}\Bigg] =& \mathbb{E}\Bigg[2 - 2\Bigg(\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\Bigg)\Bigg|\text{Observations}\Bigg] \\ =& 2 - 2\mathbb{E}\Bigg[\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\Bigg|\text{Observations}\Bigg].\end{aligned}$$

پس مساله ما به مساله زیر تبدیل می‌شود: از یک توزیع برنولی با پارامتر

$$p = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)^2$$

چندین نمونه داریم و از روی آن می‌خواهیم

$$\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

را تخمین بزنیم. باقی این مساله به تئوری تخمین مربوط است و حل آن را به خواننده کوشا واگذار می‌کنیم!