نظریه اطلاعات کوانتمی ۱ ترم پاییز ۱۳۹۲-۱۳۹۱

مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری

جلسه ۵

---

۱ نمایش ماتریسی عملگرهای خطی

یکی از بهترین راه‌ها برای مطالعه‌ی عملگرهای خطی استفاده از نمایش ماتریسی است. برای شروع فرض کنید که یک ماتریس دلخواه $m \times n$ به نام A داریم. در این صورت عملگر ضرب ماتریسی $T|v\rangle = A|v\rangle$ را که بردار ستونی n تایی $|v\rangle \in \mathbb{C}^n$ از اعداد مختلط را به برداری m تایی می‌برد در نظر بگیرید. این عملگر خطی است زیرا

$$A\left(\sum_i \alpha_i |v_i\rangle\right) = \sum_i \alpha_i A|v_i\rangle.$$

بنابراین هر عملگر که با ضرب ماتریسی تعریف می‌شود یک عملگر خطی است. اما آیا متناظر با هر عملگر خطی $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$، یک ماتریس وجود دارد که دقیقا همان کار را انجام دهد؟ جواب این سؤال مثبت است اما قبل از اینکه این ماتریس را بسازیم، باید برای فضاهای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ یک پایه مشخص کنیم. فرض کنید $\dim \mathcal{V} = n$ و $\dim \mathcal{W} = m$. همچنین فرض کنید که

$$\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\} \tag{۱}$$

پایه‌ای دلخواه برای فضای $\mathcal{V}$ و

$$\{|\omega_1\rangle, |\omega_2\rangle, |\omega_3\rangle, \cdots, |\omega_m\rangle\} \tag{۲}$$

پایه‌ای دلخواه برای فضای $\mathcal{W}$ باشد. اگر اثر عملگر خطی را بر روی بردارهای پایه $\mathcal{V}$ بدانیم، آنگاه عملگر خطی را به صورت کامل شناسایی کرده‌ایم، چون هر بردار $\mathcal{V}$ را می‌توان بر حسب ترکیب خطی بردارهای پایه $\mathcal{V}$ نوشت و با استفاده از خطی بودن عملگر می‌توان اثر عملگر را بر آن بردار دلخواه یافت. بنابراین لازم و کافی است که اثر عملگر را بر روی بردارهای پایه $\mathcal{V}$ پیدا کنیم. اثر عملگر T بر روی بردار پایه $|v_1\rangle$ برداری در فضای $\mathcal{W}$ بوده، بنابراین می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی بردارهای پایه‌ی $\mathcal{W}$ نوشت. فرض کنید که این ترکیب خطی را بصورت زیر نشان دهیم

$$T|v_1\rangle = a_{11}|\omega_1\rangle + a_{21}|\omega_2\rangle + \cdots + a_{m1}|\omega_m\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}|\omega_i\rangle.$$

مشابها در مورد بردار پایه دوم می‌توان نوشت

$$T|\upsilon_2\rangle = a_{12}|\omega_1\rangle + a_{22}|\omega_2\rangle + \cdots + a_{m2}|\omega_m\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}|\omega_i\rangle,$$

و الی آخر. حال اگر این ضرایب را در یک ماتریس $m \times n$ قرار دهیم (بطوری که ستون اول ماتریس ضرایب a_{i1} مربوط به $T|\upsilon_1\rangle$، ستون دوم ضرایب a_{i2} مربوط به $T|\upsilon_2\rangle$ و ... را دارا باشند)، به «نمایش ماتریسی» عملگر خطی T در پایه‌های فوق می‌رسیم. نشان می‌دهیم که ضرایب a_{ij} عملگر خطی T را به صورت یکتا مشخص می کنند. بردار دلخواه $|\upsilon\rangle$ را در نظر بگیرید. این بردار را می‌توان بر حسب ترکیب خطی اعضای پایه‌ی $|\upsilon_1\rangle, |\upsilon_2\rangle, |\upsilon_3\rangle, \cdots, |\upsilon_n\rangle$ نوشت

$$|\upsilon\rangle = \alpha_1|\upsilon_1\rangle + \alpha_2|\upsilon_2\rangle + \alpha_3|\upsilon_3\rangle + \cdots + \alpha_n|\upsilon_n\rangle.$$

در این صورت نمایش مختصاتی بردار $|\upsilon\rangle$ در این پایه عبارت است از

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

حال عملگر T را بر روی این بردار اعمال می‌کنیم

$$\begin{aligned} T|\upsilon\rangle &= \alpha_1 T|\upsilon_1\rangle + \alpha_2 T|\upsilon_2\rangle + \alpha_3 T|\upsilon_3\rangle + \cdots + \alpha_n T|\upsilon_n\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T|\upsilon_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}|\omega_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} |\omega_i\rangle \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} \right) \end{aligned}$$

پس نمایش مختصاتی بردار خروجی $T|\upsilon\rangle$ در پایه‌ی $\{|\omega_1\rangle, |\omega_2\rangle, |\omega_3\rangle, \cdots, |\omega_m\rangle\}$ برابر است با

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{mj} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

که در آن ماتریس A همان ماتریس ضرایب a_{ij} است که قبلا ساختیم.

توجه کنید که نمایش ماتریسی یک عملگر به پایه‌هایی که انتخاب کرده‌ایم ربط دارد. بنابراین ماتریس مربوط به یک عملگر یکتا نیست و با تغییر پایه‌های فضاهای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ تغییر می‌کند (اما ماهیت رفتاری خود عملگر تغییری نمی‌کند).

در صورتی که دامنه و برد یک عملگر خطی یکسان باشند ($\mathcal{W} = \mathcal{V}$) معمولا برای نمایش ماتریسی پایه‌ای یکسان برای فضای برد و دامنه در نظر گرفته می‌شود.

مثال‌های زیر نمایش ماتریسی چند عملگر را که روی صفحه دو بعدی $\mathbb{R}^2$ تعریف شده‌اند، در پایه استاندارد

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

نشان می‌دهند:

* چرخش ۹۰ درجه خلاف جهت عقربه ساعت:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* چرخش θ رادیان خلاف جهت عقربه ساعت:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

* انعکاس نسبت به محور x:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* انعکاس نسبت به محور y:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* دو برابر کردن یک بردار در راستای خودش:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

* تصویر بر روی محور y:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تمرین ۱ $|a\rangle$ را برداری دلخواه بگیرید و $T : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ را اینگونه تعریف کنید: $T|v\rangle = \langle a|v\rangle$. پایه‌هایی برای فضای دامنه و برد این تبدیل خطی مشخص و نمایش ماتریسی T را در این پایه‌ها بدست بیاورید.

تمرین ۲ دیدیم $T : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ که با $TX = tr(X)$ تعریف می‌شود یک عملگر خطی است. پایه‌هایی برای فضای دامنه و برد این تبدیل خطی مشخص و نمایش ماتریسی T را در این پایه‌ها بدست بیاورید.

قضیه ۳ فرض کنید $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ و $S : \mathcal{W} \to \mathcal{X}$ دو عملگر خطی باشند. فرض کنید $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$، $\{|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$ و $\{|x_1\rangle, \dots, |x_k\rangle\}$ به ترتیب پایه‌هایی برای فضاهای $\mathcal{V}$، $\mathcal{W}$ و $\mathcal{X}$ باشند. همچنین فرض کنید که A ماتریس نمایش T در پایه‌های $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ و $\{|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$ و B ماتریس نمایش S در پایه‌های $\{|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$ و $\{|x_1\rangle, \dots, |x_k\rangle\}$ باشند. در این صورت BA برابر ماتریس نمایش عملگر $ST : \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ در پایه‌های $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ و $\{|x_1\rangle, \dots, |x_k\rangle\}$ است.

طبق این قضیه نمادگذاری ما که برای ترکیب دو عملگر T و S آنها را کنار هم می‌نویسیم، نمادگذاری خوب و سازگاری با نمایش ماتریسی است.

تمرین ۴ قضیه‌ی فوق را ثابت کنید.

۱.۱ نمایش ماتریسی عملگرهای خطی در یک پایه‌ی متعامد یکه

در بخش قبل نمایش ماتریسی یک عملگر در دو پایه‌ی دلخواه از فضای ورودی و خروجی را پیدا کردیم. در صورتی که پایه‌های انتخاب شده متعامد یکه باشند، می‌توان به فرمولی معادل رسید که شکلی ساده‌تر از فرمول قبلی دارد. فرض کنید که پایه‌ی $\{|\upsilon_1\rangle, |\upsilon_2\rangle, |\upsilon_3\rangle, \cdots, |\upsilon_n\rangle\}$ برای $\mathcal{V}$ و پایه‌ی $\{|\omega_1\rangle, |\omega_2\rangle, |\omega_3\rangle, \cdots, |\omega_m\rangle\}$ برای $\mathcal{W}$ متعامد یکه باشند. در این صورت به هر عملگر خطی $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ می‌توان یک ماتریس نسبت داد. ادامه بحث را با این پایه‌ها که متعامد یکه هستند پیگیری می‌کنیم.

رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$T|\upsilon_1\rangle = a_{11}|\omega_1\rangle + a_{21}|\omega_2\rangle + \cdots + a_{m1}|\omega_m\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}|\omega_i\rangle.$$

چون این بسط بر حسب یک پایه متعامد یکه است میتوان a_{i1} را بصورت ضرب داخلی $\langle\omega_i|$ در $T|\upsilon_1\rangle$ یافت؛ یعنی

$$a_{i1} = \langle\omega_i|T|\upsilon_1\rangle.$$

و در حالت کلی

$$a_{ij} = \langle\omega_i|T|\upsilon_j\rangle.$$

۲.۱ تجزیه یک عملگر بر حسب عملگرهای ساده $|\omega_i\rangle\langle\upsilon_j|$

در این بخش عملگرهای ساده ای پیدا میکنیم بطوریکه تمامی عملگرها را بتوان بصورت ترکیب خطی آنها نوشت. به عبارت دیگر مجموعه ای از عملگرهای ساده که پایه ای برای فضا تشکیل دهند.

تعریف ۵ برای هر $1 \leq j \leq n$ و $1 \leq i \leq m$ تعریف کنید:

$$E_{ij} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$

$$E_{ij}|\upsilon\rangle = \langle\upsilon_j|\upsilon\rangle|\omega_i\rangle.$$

به عبارت دیگر این عملگر ضرب داخلی بردار ورودی را در $\langle\upsilon_j|$ حساب کرده و سپس عدد حاصل را در بردار $|\omega_i\rangle$ ضرب می‌کند. سعی کنید تصویر هندسی نحوه‌ی رفتار این عملگر را در ذهنتان ترسیم کنید. دقت کنید که اگر $j' \neq j$ آنگاه از متعامد یکه بودن پایه نتیجه می‌شود

$$E_{ij}|\upsilon_{j'}\rangle = \langle\upsilon_j|\upsilon_{j'}\rangle|\omega_i\rangle = 0.$$

از آنجا که $\langle \upsilon_j|\upsilon\rangle$ یک عدد است می‌توان آنرا سمت راست $|\omega_i\rangle$ برد

$$E_{ij}|\upsilon\rangle = |\omega_i\rangle\langle \upsilon_j|\upsilon\rangle \Rightarrow E_{ij} = |\omega_i\rangle\langle \upsilon_j|.$$

در این جا به وضوح سادگی نمادگذاری دیراک را می‌بینیم.

حال ماتریس نمایش این عملگر را در پایه‌های مورد نظر می‌یابیم. برای این کار کافی است که بردارهای $|\omega_i\rangle$ و $\langle \upsilon_j|$ را در پایه مورد نظر بنویسیم و در هم ضرب کنیم. بردار مربوط به $|\omega_i\rangle$ در محل i-ام عدد 1 را دارد و بقیه جاها عدد صفر. همینطور گزاره مشابهی در مورد بردار $\langle \upsilon_j|$ برقرار است. حاصلضرب آنها ماتریسی خواهد بود که همه‌ی درایه‌های آن صفر است، بجز درایه‌ی (i, j) که برابر 1 است.

مثال ۶ محاسبات زیر را که در مورد ماتریس‌ها انجام دادیم را بیاد آورید

$$|\upsilon\rangle = \sum_{i=1}^{d}(|\upsilon_i\rangle, |\upsilon\rangle)|\upsilon_i\rangle = \sum_{i=1}^{d}\langle \upsilon_i|\upsilon\rangle|\upsilon_i\rangle = \sum_{i=1}^{d}|\upsilon_i\rangle\langle \upsilon_i||\upsilon\rangle = \left(\sum_{i=1}^{d}|\upsilon_i\rangle\langle \upsilon_i|\right)|\upsilon\rangle.$$

در اینجا می‌توان $\sum_{i=1}^{d}|\upsilon_i\rangle\langle \upsilon_i|$ را به عنوان یک عملگر در نظر گرفت که بر روی یک بردار $|\upsilon\rangle$ عمل کرده است. در نتیجه $I = \sum_{i=1}^{d}|\upsilon_i\rangle\langle \upsilon_i|$ عملگر همانی است! پس برای هر پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|\upsilon_1\rangle, \ldots, |\upsilon_d\rangle\}$ می‌توان عملگر I را به صورت زیر نوشت

$$I = \sum_{i=1}^{d}|\upsilon_i\rangle\langle \upsilon_i| = \sum_{i=1}^{d}E_{ii}.$$

برای عملگر خطی دلخواه $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ داریم

$$\begin{aligned} T = I_W T I_V &= \left(\sum_{i=1}^{m}|\omega_i\rangle\langle \omega_i|\right) T \left(\sum_{j=1}^{n}|\upsilon_j\rangle\langle \upsilon_j|\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\omega_i\rangle\langle \omega_i|T|\upsilon_j\rangle\langle \upsilon_j| \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle \omega_i|T|\upsilon_j\rangle|\omega_i\rangle\langle \upsilon_j|. \end{aligned}$$

توجه کنید که در اینجا منظور از $\langle \omega|T|\upsilon\rangle$ این است که ابتدا T روی $|\upsilon\rangle$ اثر می‌کند:

$$\langle \omega|T|\upsilon\rangle = (|\omega\rangle, T|\upsilon\rangle).$$

بنابراین

$$T = \sum_{ij}\langle \omega_i|T|\upsilon_j\rangle|\omega_i\rangle\langle \upsilon_j| = \sum_{ij}\langle \omega_i|T|\upsilon_j\rangle E_{ij} = \sum_{ij}a_{ij}E_{ij} \tag{۳}$$

که در آن $a_{ij} = \langle \omega_i|T|\upsilon_j\rangle$ و E_{ij} در تعریف ۵ بیان شده است. این همان نمایش ماتریسی عملگر T در پایه‌های مشخص شده برای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ است. از آنجایی که نمایش ماتریسی E_{ij} تنها در درایه (i, j) مقدار یک دارد و بقیه جاها مقدار صفر دارد، $T = \sum_{ij}a_{ij}E_{ij}$ نتیجه می‌دهد که نمایش ماتریسی T در درایه (i, j) ماتریس مقدار a_{ij} دارد.

مثال ۷ عملگر Z در فضای دو بعدی با پایه متعامد یکه‌ی $|v_0\rangle = |0\rangle$ و $|v_1\rangle = |1\rangle$ را اینگونه تعریف می‌کنیم که

$$\begin{aligned} |0\rangle &\mapsto \quad |0\rangle \\ |1\rangle &\mapsto -|1\rangle \end{aligned}$$

در این صورت این عملگر را می‌توان با محاسبه $a_{ij} = \langle\omega_i|T|v_j\rangle$ و استفاده از فرمول (۳) به شکل زیر نوشت:

$$|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

و بیان ماتریسی عملگر در پایه داده شده به شرح زیر است

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right)$$

مثال ۸ عملگر X در فضای دو بعدی با پایه‌ی متعامد یکه‌ی $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را اینگونه تعریف می‌کنیم که

$$\begin{aligned} |0\rangle &\mapsto |1\rangle \\ |1\rangle &\mapsto |0\rangle \end{aligned}$$

در این صورت این عملگر را میتوان بشکل زیر نوشت:

$$|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$$

و بیان ماتریسی عملگر در پایه داده شده به شرح زیر است

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

مثال ۹ عملگرهای Z و X را در دو مثال قبل تعریف کردیم. ترکیب این دو عملگر برابر است با

$$\begin{aligned} XZ &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \\ &= |0\rangle\langle 1|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 0|1\rangle\langle 1| \\ &= -|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|. \end{aligned}$$

پس نمایش ماتریسی XZ در پایه‌ی $|0\rangle, |1\rangle$ برابر است با

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

تغییر پایه و نمایش ماتریسی

عملگر دلخواهی از $T \in \mathbf{L}(\mathcal{V})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید پایه‌ای برای فضای $\mathcal{V}$ مشخص کرده‌ایم و ماتریس نمایش این عملگر را در این پایه بدست آورده‌ایم. در صورت تغییر پایه نمایش تمامی بردارها تغییر می‌کند، و در نتیجه ماتریس نمایش عملگر نیز تغییر می‌کند. همان طور که قبلا دیدیم تغییر پایه توسط یک ماتریس وارون‌پذیر P صورت می‌پذیرد. جهت یافتن ماتریس نمایش T در پایه‌ی جدید کافی است که آن را توسط P به پایه‌ی قدیم تبدیل کرده، سپس ماتریس عملگر در پایه قدیم را به آن اعمال کنیم. نهایتا حاصل را مجددا به پایه جدید ترجمه کنیم. بنابراین اگر ماتریس عملگر T در پایه‌ی قدیم برابر A باشد، ماتریس نمایش آن در پایه‌ی جدید برابر با $P^{-1}AP$ خواهد بود. در صورتی که پایه‌ی اولیه متعامد یکه بوده و پایه جدید نیز متعامد یکه باشد، P ماتریسی یکانی خواهد بود و می‌توان تغییر پایه را بشکل $P^{\dagger}AP$ نوشت.

مثال ۱۰ عملگر چرخش به اندازه 45 درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت را در صفحه‌ی دو بعدی در نظر بگیرید. در پایه‌ی متعامد یکه‌ی استاندارد (که آن را با $|e_0\rangle$، $|e_1\rangle$ نشان می‌دهیم) توصیف ماتریسی این عملگر به شرح زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

حال فرض کنید پایه‌ی جدیدی را تعریف کنیم که بردارهای آن عبارتند از

$$|v_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

جهت یافتن ماتریس تغییر پایه توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} |v_0\rangle &= |e_0\rangle \\ |v_1\rangle &= |e_0\rangle + |e_1\rangle \end{aligned}$$

پس ماتریس تغییر پایه برابر است با

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بردار دلخواهی را در نظر بگیرید و فرض کنید که مختصات بردار در پایه‌ی $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle\}$ برابر

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

باشد. علاقمند هستیم که ببینیم پس از چرخش 45 درجه مختصات بردار جدید در مختصات جدید چه خواهد شد. ابتدا نقطه را به مختصات در پایه‌ی $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle\}$ تبدیل می‌کنیم؛ برای این کار کافی است که بردار مختصات را در ماتریس P ضرب کنیم

$$P \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

سپس در مختصات استاندارد نقطه را 45 درجه می‌چرخانیم:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left(P \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right).$$

اما مختصات جدید بدست آمده در پایه استاندارد است؛ لازم است که آن را در پایه $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle\}$ بیان کنیم:

$$P^{-1} \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left(P \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \right) \right),$$

که برابر است با:

$$\left(P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} P \right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین نمایش ماتریسی عملگر چرخش 45 در پایه‌ی جدید برابر است با

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

تغییر پایه و ماتریس های متشابه

دیدیم که نمایش ماتریسی یک عملگر به پایه انتخاب شده بستگی دارد؛ اما رفتار خود عملگر مستقل از پایه‌ی انتخاب شده است. اگر نمایش ماتریسی عملگر در یک پایه برابر ماتریس A باشد و ما توسط ماتریس تغییر پایه P، پایه‌ی فضا را تغییر دهیم، آنوقت نمایش ماتریسی در پایه جدید $P^{-1}AP$ خواهد بود که ماتریسی متشابه با A است. پس ماتریس‌های نمایش یک عملگر خطی در پایه‌های مختلف متشابه هستند. از آنجایی که ویژگی‌هایی ذاتی مربوط به عملگر مستقل از اینکه در چه پایه‌ای بیان شده باشند هستند، انتظار داریم که ماتریس های A و $P^{-1}AP$ دارای خواص مشابه هم باشند که جلسه قبل بررسی شد. به طور خاص ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژه‌ی یکسان، ولی بردار ویژه‌های متفاوت دارند. اما پس از کمی دقت متوجه می‌شویم که راستای بردارهای ویژه‌ی یک عملگر خطی نیز مستقل از انتخاب پایه هستند، اما این نمایش مختصاتی آنهاست که به پایه‌ی انتخاب شده ربط دارد. به همین جهت هنگام تغییر دستگاه مختصات، نمایش مختصاتی بردارهای ویژه هم تغییر میکرد.

تعریف ۱۱ می‌دانیم که مقادیر ویژه، دترمینان و اثر ماتریس‌های متشابه یکسان است. در نتیجه برای عملگر خطی $T \in \mathbf{L}(\mathcal{V})$ می‌توان $\det T$ و trT برابر دترمینان و اثر ماتریس نمایش T در پایه‌ای دلخواه تعریف کرد.

تمرین ۱۲ فرض کنید $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه باشد. نشان دهید

$$trT = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i | T | v_i \rangle.$$

عملگر قطری در یک پایه متعامد یکه

امکان دارد که پس از تغییر پایه نمایش ماتریسی یک عملگر ماتریسی قطری بشود. در بخش آنالیز ماتریسی دیدیم یک ماتریس قطری شدنی است اگر یک پایه از بردارهای ویژه‌ی آن وجود داشته باشد. به طور مشابه برای عملگر $T:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ بردار $|v\rangle$ را یک بردار ویژه با مقدار ویژه‌ی λ می‌نامیم اگر $T|v\rangle=\lambda|v\rangle$.

فرض کنید که یک پایه‌ی متعامد یکه از بردار ویژه‌های T وجود داشته باشد. این پایه را $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ بگیرید و فرض کنید $T|v_i\rangle=\lambda_i|v_i\rangle$. تعریف کنید

$$T'=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|.$$

ادعا می‌کنیم $T'=T$. برای اثبات این تساوی کافی است نشان دهیم اثر این دو عملگر بر روی پایه‌ی $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ یکسان است. طبق فرض $T|v_j\rangle=\lambda_j|v_j\rangle$. همچنین از آنجا که این پایه متعامد یکه است داریم

$$T'|v_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|v_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}\lambda_i|v_i\rangle=\lambda_j|v_j\rangle.$$

نتیجه می‌گیریم

$$T=T'=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|. \tag{۴}$$

یعنی عملگری که دارای پایه‌ای متعامد یکه از بردارهای ویژه باشد فرم فوق را دارد. توجه کنید که نمایش ماتریسی $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iE_{ii}$ یک ماتریس قطری خواهد بود.

تقریبا برای تمامی عملگرها می‌توان پایه‌ای (نه لزوما متعامد یکه) یافت که منجر به نمایش قطری شود زیرا جلسه‌ی قبل دیدیم که داشتن مقادیر ویژه متمایز یک شرط کافی برای قطری شدن است. اما دقت کنید که نمایش خاصی که در فرمول (۴) داشتیم فقط برای پایه متعامد یکه درست است. اینکه بتوان یک عملگر را در یک پایه متعامد یکه قطری کنیم نیازمند شرط‌های قوی‌تری است. در واقع اکثر عملگرها در پایه متعامد یکه قطری نمیشوند مگر اینکه شرط‌های خاصی فراهم شود. این شرط‌ها را بعدا بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید که بتوان برای عملگر T نمایشی قطری یافت. این موضوع به این معنی است که پایه‌ای از بردارهای ویژه‌ی این عملگر وجود دارد که آنها را به بردارهایی در همان راستا خودشان منتقل می‌کند. بنابراین رفتار عملگر خطی T در راستای بردارهای ویژه آسان است. اما رفتار عملگر در مورد بردارهای دیگر چگونه است؟ چون بردارهای ویژه بردارهایی مستقل خطی بوده و ترکیب خطی آنها کل فضا را پوشش می‌دهد، هر بردار دلخواه را می‌توان بر حسب ترکیب خطی بردارهای پایه نوشت. حال از خطی بودن عملگر می‌توان استفاده کرده و تاثیر عملگر بر روی این ترکیب خطی را برابر جمع تاثیر عملگر بر روی بردارهای پایه نوشت.

مثال ۱۳ عملگر $X=|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|$ را در مثال ۸ تعریف کردیم. قرار دهید

$$|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle),\qquad |-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle).$$

$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه است و داریم

$$X = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|.$$

پس $|+\rangle$ و $|-\rangle$ بردارهای ویژه‌ی X هستند متناظر با مقادیر ویژه‌ی $+1$ و -1.

توابع یک عملگر

اگر عملگر T^2 را دو اعمال متوالی عملگر T تعریف کنیم، آنگاه می‌توان آن را به منزله‌ی محاسبه تابع $f(x) = x^2$ بر روی عملگر T نیز تفسیر کرد. مشابها می‌توان صحبت از $T^2 + T$ به عنوان یک عملگر کرد و معنی آن جمع خروجی های مربوط به عملگر T^2 و T است.

اگر λ مقدار ویژه‌ی عملگر T باشد با بردار ویژه‌ی $|v\rangle$، آنگاه λ^2 مقدار ویژه‌ی T^2 است زیرا

$$T^2|v\rangle = T\left(\lambda|v\rangle\right) = \lambda T|v\rangle = \lambda^2|v\rangle.$$

می‌بینیم که بردار ویژه‌ی مربوطه تغییری نکرده است، ولی مقدار ویژه به توان دو رسیده است. در حالت کلی میان قضایایی که در مورد عملگرها و ماتریس ها وجود دارد نزدیکی بسیار زیادی وجود دارد. کافی است که یک پایه خاص را در نظر بگیریم و راجع به عملگر در آن پایه‌ی خاص فکر کنیم. مشابه حالت ماتریسی قضیه زیر را در مورد عملگرها داریم:

قضیه ۱۴ اگر λ مقدار ویژه مربوط به ماتریس A باشد، آنگاه برای هر چندجمله‌ای p، $p(\lambda)$ مقدار ویژه ماتریس $p(A)$ با همان بردار ویژه است.

اثبات: فرض کنید یک پایه‌ی متعامد یکه از بردارهای ویژه‌ی عملگر خطی $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ وجود داشته باشد. در این صورت دیدیم که T فرم زیر را دارد

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i|.$$

که در آن $\{|\upsilon_1\rangle, \ldots, |\upsilon_n\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه از بردارهای ویژه‌ی T است. در این صورت

$$T^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j |\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i|\upsilon_j\rangle\langle\upsilon_j| = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\lambda_i\lambda_j |\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_j| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i|.$$

بصورت مشابه برای هر k طبیعی

$$T^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k |\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i|.$$

به طور کلی برای هر چندجمله‌ای p میتوان نشان داد

$$p(T) = \sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i) |\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i|.$$

$\square$

مثال ۱۵ عملگر $Z = |0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle$ را در مثال ۷ تعریف کردیم. در این صورت عملگر Z^m برابر است با

$$Z^m = |0\rangle\langle 0| + (-1)^m |1\rangle\langle 1|,$$

و عملگر e^Z برابر است با

$$e^Z = e|0\rangle\langle 0| + e^{-1}|1\rangle\langle 1|.$$

توجه کنید که در اینجا e^Z با استفاده از بسط تیلور e^x محاسبه کردیم.

۲ الحاقی

فرض کنید که دو فضای برداری $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ و $\mathcal{W} = \mathbb{C}^m$ داریم و برای هرکدام از این دو فضا یک ضرب داخلی تعریف کرده ایم. این دو ضرب داخلی در دو فضای متفاوت تعریف شده اند و هیچ ارتباطی با هم ندارند. جهت سهولت نمادگذاری برای دو بردار $|v_1\rangle$ و $|v_2\rangle$ در $\mathcal{V}$، ضرب داخلی آنها را با نماد $(|v_1\rangle, |v_2\rangle)$ نشان میدهیم و مشابها برای دو بردار $|w_1\rangle$ و $|w_2\rangle$ در $\mathcal{W}$، ضرب داخلی آنها را با نماد یکسان $(|w_1\rangle, |w_2\rangle)$ نشان میدهیم. اینکه کدام ضرب داخلی مقصود است را باید با توجه به فضایی که بردارها در آن قرار میگیرند متوجه شد.

انگیزه تعریف الحاقی: دیدیم که برای ماتریس A با سایز $m \times n$ می‌توان عملگر خطی‌ای به صورت $|v\rangle \mapsto A|v\rangle$ تعریف کرد. این عملگر به هر بردار $|v\rangle \in \mathbb{C}^n$ یک بردار در $\mathbb{C}^m$ نسبت می‌دهد. فرض کنید $|w\rangle \in \mathbb{C}^m$ برداری دلخواه باشد. در این صورت می‌توانیم ضرب داخلی $(|w\rangle, A|v\rangle)$ را در نظر بگیریم. این ضرب داخلی برابر است با $\langle w|A|v\rangle$. از طرف دیگر با استفاده از ترانهاده مزدوج ماتریس A می‌توان عبارت بالا را نتیجه ضرب داخلی $(A^\dagger|w\rangle, |v\rangle) = (A^\dagger|w\rangle)^\dagger|v\rangle = \langle w|A|v\rangle$ در نظر گرفت. $A^\dagger$ ماتریسی $n \times m$ است و لذا متناظر با آن می‌توان عملگری خطی $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$می تعریف کرد. پس $A^\dagger|w\rangle$ برداری در $\mathbb{C}^n$ است (به ابعاد ماتریس ها و بردارها توجه کنید). در نتیجه می‌توان ضرب داخلی $(A^\dagger|w\rangle, |v\rangle)$ را در نظر گرفت که برابر است با $(A^\dagger|w\rangle)^\dagger|v\rangle = \langle w|A|v\rangle$. در نتیجه

$$(A^\dagger|w\rangle, |v\rangle) = (|w\rangle, A|v\rangle).$$

با توجه به تساوی فوق $A^\dagger$ را الحاقی[۱] A گویند.

تعریف ریاضی دقیق الحاقی: نکته مهم این است که ما الحاقی یک عملگر را بصورت یک عملگر تعریف میکنیم، بدون اینکه پایه خاصی را ثابت کرده باشیم. بنابراین بحث بالا انگیزه ای برای تعریف الحاقی بود.

فرض کنید $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ عملگری خطی باشد. در این صورت عملگر خطی $S : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ را الحاقی T گویند اگر داشته باشیم $(S|w\rangle, |v\rangle) = (|w\rangle, T|v\rangle)$. الحاقی T را با $T^\dagger = S$ نمایش می‌دهیم. پس

$$(T^\dagger|w\rangle, |v\rangle) = (|w\rangle, T|v\rangle).$$

نشان داده میشود که این رابطه الحاقی یک عملگر را بصورت یکتا مشخص میکند. عملگر الحاقی یک عملگر است که هم به عملگر اصلی و هم به ضرب داخلی انتخابی ربط دارد؛ اما به پایه هایی که برای فضا انتخاب میکنیم ربطی ندارد.

[۱] Adjoint

مثال ۱۶ الحاقی تبدیل همانی، تبدیل همانی است.

مثال ۱۷ عملگر دوران در صفحه دو بعدی به اندازه 30 درجه را در نظر بگیرید. در این صورت معنی $\langle w|T|v\rangle$ این است که بردار $|v\rangle$ را 30 درجه دوران دهیم و سپس ضرب داخلی آن را با $|w\rangle$ حساب کنیم. اما میتوان بجای این کار ابتدا $|w\rangle$ را -30 درجه چرخاند و ضرب داخلی آن را در $|v\rangle$ حساب کرد. پس الحاقی عملگر دوران 30 درجه، عملگر دوران -30 درجه است.

مثال ۱۸ مجددا فضای دو بعدی را در نظر بگیرید. عملگر تصویر کردن عمودی بر یک خط گذرا از مبدا را در نظر بگیرید. در این صورت معنی $\langle w|T|v\rangle$ این است که بردار $|v\rangle$ را تصویر کرده و سپس ضرب داخلی تصویر آن را با $|w\rangle$ حساب کنیم. اما میتوان بجای این کار ابتدا $|w\rangle$ را در همان راستا تصویر کرد و ضرب داخلی آن را در $|v\rangle$ حساب کرد. پس الحاقی عملگر تصویر کردن، خود آن عملگر میباشد. پس الحاقی این عملگر با خودش برابر است.

لم ۱۹ از آنجایی که هر عملگر دلخواهی را می‌توان ترکیب خطی عملگرهای E_{ij} نوشت، بررسی الحاقی عملگر E_{ij} سودمند است. ادعا می‌کنیم که $E_{ij}^{\dagger} = (|\omega_i\rangle\langle\upsilon_j|)^{\dagger} = |\upsilon_j\rangle\langle\omega_i|$.

اثبات: برای هر دو بردار $|\upsilon\rangle, |\omega\rangle$ داریم

$$\begin{aligned}(|\omega\rangle, E_{ij}|\upsilon\rangle) &= (|\omega\rangle, |\omega_i\rangle\langle\upsilon_j|\upsilon\rangle) = \langle\omega|\omega_j\rangle\langle\upsilon_j|\upsilon\rangle \\ &= \langle\omega|\omega_j\rangle(|\upsilon_j\rangle, |\upsilon\rangle) = (\langle\omega|\omega_j\rangle^*|\upsilon_j\rangle, |\upsilon\rangle) \\ &= (\langle\omega_j|\omega\rangle|\upsilon_j\rangle, |\upsilon\rangle) = (|\upsilon_j\rangle\langle\omega_i|\omega\rangle, |\upsilon\rangle) \\ &= ((|\upsilon_j\rangle\langle\omega_i|)|\omega\rangle, |\upsilon\rangle)\end{aligned}$$

در نتیجه $E_{ij}^{\dagger}$ باید برابر $|\upsilon_j\rangle\langle\omega_i|$ باشد.

تساوی‌های فوق اثباتی از $E_{ij}^{\dagger} = |\upsilon_j\rangle\langle\omega_i|$ ارایه می‌دهند. ولی برای داشتن شهود هندسی بیشتر نسبت به رفتار عملگر الحاقی اثبات زیر نیز مفید است.

خروجی عملگر $|\omega_i\rangle\langle\upsilon_j|$ همواره برداری در راستای $|\omega_i\rangle$ خواهد بود. یعنی فضای برد این عملگر خطی یک زیرفضای یک بعدی از فضای $\mathcal{W}$ می‌باشد. بردار دلخواه $|\omega\rangle$ که بر $|\omega_i\rangle$ عمود است را در نظر بگیرید. در این صورت با استفاده از رابطه

$$(E_{ij}^{\dagger}|w\rangle, |v\rangle) = (|w\rangle, E_{ij}|v\rangle)$$

نتیجه می‌گیریم که برای هر بردار دلخواه $|\upsilon\rangle$ داریم

$$(E_{ij}^{\dagger}|w\rangle, |v\rangle) = 0.$$

این تنها زمانی می‌تواند اتفاق بیافتد که $E_{ij}^{\dagger}|w\rangle = 0$ یعنی $|w\rangle$ در فضای پوچ $E_{ij}^{\dagger}$ باشد. پس هر بردار دلخواه $|\omega\rangle$ که بر $|\omega_i\rangle$ عمود است در فضای پوچ $E_{ij}^{\dagger}$ می‌باشد. یعنی فضای پوچ عملگر الحاقی شامل زیرفضای عمود بر $|\omega_i\rangle$ بردار

می‌باشد. پس بعد فضای پوچ عملگر حداقل برابر $\dim(\mathcal{W}) - 1$ است. اما چون الحاقی ناصفر است، بعد فضای پوچ نمی‌تواند $\dim(\mathcal{W})$ باشد. پس بعد فضای پوچ دقیقا $\dim(\mathcal{W}) - 1$ می‌باشد. در نتیجه بعد فضای برد عملگر الحاقی برابر یک می‌باشد.

بردار $E_{ij}^{\dagger}|\omega_i\rangle$ را در نظر بگیرید. ضرب داخلی این بردار در بردار دلخواه $|v\rangle$ که بر $|v_j\rangle$ عمود است صفر است زیرا

$$E_{ij}|v\rangle = 0 \Rightarrow (|\omega_i\rangle, E_{ij}|v\rangle) = (E_{ij}^{\dagger}|\omega_i\rangle, |v\rangle) = 0.$$

در نتیجه بردار $E_{ij}^{\dagger}|\omega_i\rangle$ تنها میتواند در راستای $|v_j\rangle$ باشد.

حال خواص بدست آمده از الحاقی را با خواص عملگر $|v_j\rangle\langle\omega_i|$ مقایسه کنید. از این مقایسه نتیجه می‌شود که الحاقی E_{ij} حتما باید بصورت

$$E_{ij}^{\dagger} = \alpha|v_j\rangle\langle\omega_i|$$

باشد. با استفاده از رابطه

$$(E_{ij}^{\dagger}|w_i\rangle, |v_j\rangle) = (|w_i\rangle, E_{ij}|v_j\rangle)$$

ضریب α باید یک باشد. $\square$

لم ۲۰ الحاقی دارای خواص زیر است:

(۱) $(S + \alpha T)^{\dagger} = S^{\dagger} + \alpha^{*} T^{\dagger}$

(۲) $(ST)^{\dagger} = T^{\dagger} S^{\dagger}$

(۳) $(T^{\dagger})^{\dagger} = T$

(۴) $(T^{\dagger})^{-1} = (T^{-1})^{\dagger}$

اثبات: برای اثبات (۱) توجه کنید که

$$\begin{aligned}((S^{\dagger} + \alpha^{*} T^{\dagger})|w\rangle, |v\rangle) &= (S^{\dagger}|w\rangle, |v\rangle) + \alpha(T^{\dagger}|w\rangle, |v\rangle) \\ &= (|w\rangle, S|v\rangle) + \alpha(|w\rangle, T|v\rangle) \\ &= (|w\rangle, (S + \alpha T)|v\rangle) \\ &= ((S + \alpha T)^{\dagger}|w\rangle, |v\rangle).\end{aligned}$$

در نتیجه باید داشته باشیم $(S + \alpha T)^{\dagger} = S^{\dagger} + \alpha^{*} T^{\dagger}$.

برای اثبات (۲) توجه کنید که

$$\begin{aligned}\big((ST)^\dagger|w\rangle,|v\rangle\big) &= (|w\rangle, ST|v\rangle)\\ &= \big(|w\rangle, S(T|v\rangle)\big)\\ &= (S^\dagger|w\rangle, T|v\rangle)\\ &= (T^\dagger S^\dagger|w\rangle, |v\rangle).\end{aligned}$$

در نتیجه باید داشته باشیم $(ST)^\dagger = T^\dagger S^\dagger$.

اثبات (۳) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود و (۴) را می‌توان با استفاده از (۲) ثابت کرد اگر $S = T^{-1}$ را انتخاب کنیم. □

حال به بیان قضیه اصلی، پرکاربرد و مهم این بخش می‌پردازیم:

قضیه ۲۱ اگر پایه‌های متعامد یکه دلخواهی برای فضاهای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ در نظر گرفته و A را ماتریس نمایش عملگر T در این پایه‌ها بگیریم، آنگاه نمایش ماتریسی $T^\dagger$ در این پایه‌ها برابر $A^\dagger$ خواهد بود.

نکته: شرط استفاده از پایه‌های متعامد یکه در این قضیه ضروری است، اما هر پایه‌ی متعامد یکه‌ای قابل انتخاب است.

اثبات: پایه‌های متعامد یکه‌ی دلخواه $\{|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ و $\{|w_1\rangle,\ldots,|w_n\rangle\}$ را در نظر بگیرید. ابتدا عملگر E_{ij} در این پایه‌ها را در نظر بگیرید. نمایش ماتریسی E_{ij} در درایه‌ی (i,j) مقدار 1 و در بقیه جاها مقدار صفر دارد. اگر از آن مزدوج ترانهاده بگیریم ماتریسی بدست می‌آید که در مولفه (j,i) مقدار 1 و در بقیه جاها مقدار صفر دارد و این همان نمایش ماتریسی $E_{ji} = E_{ij}^\dagger$ می‌باشد. پس در مورد عملگرهای ساده E_{ij} قضیه برقرار است.

اما دیدیم که هر عملگری را می‌توان بصورت ترکیب خطی عملگرهای E_{ij} نوشت:

$$T = \sum_{i,j} \alpha_{ij}|w_j\rangle\langle v_i|$$

که در آن $\alpha_{ij} = \langle w_j|T|v_i\rangle$. در این صورت با توجه به لم ۱۹ و خواص لم ۲۰ داریم

$$T^\dagger = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^*|v_i\rangle\langle w_j|.$$

می‌بینیم که ماتریس ضرایب $T^\dagger$ از مزدوج و سپس ترانهاده کردن ماتریس نمایش T بدست می‌آید.
□

تمرین ۲۲ برای $T \in T(\mathcal{V})$ نشان دهید $\langle w|T^\dagger|v\rangle = \langle v|T|w\rangle^*$. همچنین نشان دهید $tr(T^\dagger) = (trT)^*$.

تمرین ۲۳ در تمرین‌های قبل دیدیم که $(X,Y) := tr(X^\dagger Y)$ یک ضرب داخلی روی فضای ماتریس‌های $n\times n$ ($M_n(\mathbb{C})$) تعریف می‌کند. همچنین دیدیم که برای $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ نگاشت $T: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ که با $T(X) = AXB$ تعریف می‌شود یک عملگر خطی است. نشان دهید $T^\dagger(X) = A^\dagger X B^\dagger$.

۳ متشابه یکانی

تعریف ۲۴ دو ماتریس مربعی A و B را متشابه یکانی می‌گوییم اگر برای یک ماتریس یکانی U داشته باشیم

$$A = U^{-1}BU = U^{\dagger}BU.$$

تمرین ۲۵ ثابت کنید که اگر A و B متشابه یکانی باشند، و B و C متشابه یکانی باشند، آنگاه A و C نیز متشابه یکانی هستند. به عبارت دیگر ماتریس‌های متشابه یکانی یک کلاس هم ارزی تشکیل می‌دهند.

قضیه ۲۶ اگر دو ماتریس A و B با درایه‌های به ترتیب a_{ij} و b_{ij} متشابه یکانی باشند آنگاه

$$\sum_{ij} |a_{ij}|^2 = \sum_{ij} |b_{ij}|^2$$

اثبات: فرض کنید $A = U^{\dagger}BU$ برای یک ماتریس یکانی U. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که

$$\sum_{ij} |a_{ij}|^2 = \mathrm{tr}(A^{\dagger}A)$$

پس کافی است نشان دهیم $\mathrm{tr}(A^{\dagger}A) = \mathrm{tr}(B^{\dagger}B)$. داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^{\dagger}A) &= \mathrm{tr}((U^{\dagger}BU)^{\dagger}U^{\dagger}BU) \\
&= \mathrm{tr}(U^{\dagger}B^{\dagger}UU^{\dagger}BU) \\
&= \mathrm{tr}(U^{\dagger}B^{\dagger}BU) \\
&= \mathrm{tr}(B^{\dagger}BUU^{\dagger}) \\
&= \mathrm{tr}(B^{\dagger}B).
\end{aligned}$$

□

تمرین ۲۷ آیا می‌توانید اثبات دیگری برای رابطه بالا با توجه به اینکه ماتریس یکانی ضرب داخلی را حفظ می‌کند بیابید؟

تمرین ۲۸ ثابت کنید که دو ماتریس زیر متشابه هستند، اما متشابه یکانی نیستند.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که

$$\sqrt{\mathrm{tr}(A^{\dagger}A)} = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$$

همان نرم ای است که توسط ضرب داخلی $(X, Y) = \mathrm{tr}(X^{\dagger}Y)$ روی فضای ماتریس‌ها القا می‌شود. این نرم را نرم فروبنیوس[۲] می‌گویند.

تمرین ۲۹ نرم فروبنیوس یک ماتریس یکانی را بیابید.

[۲] Frobenius norm

۱.۳ تجزیه شور

قضیه ۳۰ (قضیه تجزیه شور) [۳] هر ماتریس مربعی A با یک ماتریس بالا مثلثی «متشابه یکانی» است. یعنی برای هر ماتریس A ماتریس یکانی U وجود دارد به طوری که

$$B = U^\dagger A U$$

بالا مثلثی است. توجه کنید که در این صورت درایه‌های روی قطر B همان مقادیر ویژه‌ی هستند. مشابه این قضیه برای ماتریس های پایین مثلثی نیز برقرار است.

جهت فهم معنی این قضیه فرض کنید که عملگر را در پایه ای بیان کنیم که بالا مثلثی شود. ماتریس مربوطه را A بنامید. ماتریس های بالا مثلثی دارای این خاصیتند که اگر در برداری ضرب شوند که بجز k مولفه اول، بقیه مولفه ها صفر باشد، بردار خروجی نیز دارای همین خاصیت خواهد بود. بصورت شکلی یعنی:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

اما بردارهایی که بجز k مولفه اول بقیه مولفه هایشان صفر است یک زیر فضای برداری k بعدی تشکیل میدهند که آن را با $\mathcal{W}_k$ نشان میدهیم. اگر عملگر مربوط به A را T بنامیم ($T|v\rangle = A|v\rangle$)، تجزیه شور در واقع بیان می‌کند که برای هر عملگر T پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$ وجود دارد به طوری که اگر $\mathcal{W}_k$ را زیر فضای تولید شده توسط $\{|e_1\rangle, \ldots, |e_k\rangle\}$ بگیریم آنگاه $\mathcal{W}_k$ برای هر $1 \leq k \leq n$ تحت T ناورداست، یعنی

$$T\mathcal{W}_k \subseteq \mathcal{W}_k.$$

دقت کنید که $\mathcal{W}_1$ یک زیرفضای یک بعدی ناوردا، و در نتیجه یک بردار ویژه T است.

در ادامه قضیه‌ی شور را ثابت می‌کنیم.

اثبات: ابتدا بصورت هندسی اثبات را توصیف می‌کنیم، و سپس آن را بصورت جبری دقیق می‌کنیم. بردار ویژه‌ی دلخواه $|e_1\rangle$ از A را در نظر بگیرید. این بردار ویژه را به عنوان عضو اول پایه انتخاب می‌کنیم. سپس فضای عمود به این بردار ویژه

[۳] Schur decomposition

را در نظر بگیرید: اگر $|v\rangle$ بردار دلخواهی از این فضای عمود باشد، $T|v\rangle$ لزوما بر $|e_1\rangle$ عمود نیست. پس آن را می‌توان بصورت یکتا بصورت جمع $\alpha|e_1\rangle + |w\rangle$ نوشت. اگر بخش $\alpha|e_1\rangle$ را دور بیاندازیم، بردار $|w\rangle$ را بدست می‌آوریم که در فضای عمود قرار دارد. بنابراین می‌توان عملگر جدیدی را معرفی کرد که بردار $|v\rangle$ از فضای عمود را به بردار $|w\rangle$ از فضای عمود می‌برد. اصطلاحا به این عملگر جدید، تحدید شده عملگر T به فضای عمود گفته می‌شود. این عملگر تحدید شده دارای یک بردار ویژه است که آن را $|e_2\rangle$ بنامید. واضحا این بردار بر $|e_1\rangle$ عمود است. در این صورت $T|e_2\rangle$ ترکیب خطی ای از دو بردار $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ خواهد بود و زیرفضای تشکیل شده توسط این دو بردار، زیرفضایی ناوردا تحت T می‌باشد که آن را با $\mathcal{W}_2$ نشان می‌دهیم. با ادامه این کار بصورت استقرایی قضیه ثابت می‌شود.

اما اثبات جبری این قضیه از طریق ساختن ماتریس یکانی U است. بردار ویژه‌ی دلخواه $|e_1\rangle$ از A با مقدار ویژه‌ی λ_1 را در نظر بگیرید. بردار $|e_1\rangle$ را می‌توان به پایه‌ی متعامد یکه‌ای مثل $|e_1\rangle, |u_2\rangle, \cdots, |u_n\rangle$ برای کل فضا بسط داد. هر بردار دلخواه فضا را می‌توان بصورت برداری در راستای $|e_1\rangle$ و برداری در فضای عمود بر $|e_1\rangle$ (در راستای بقیه‌ی اعضای پایه) نوشت. در این صورت نمایش ماتریسی عملگر T در پایه‌ی $|e_1\rangle, |u_2\rangle, \cdots, |u_n\rangle$ به شکل ماتریس بلوکی زیر خواهد بود:

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$$

و اگر این اعضای پایه $|e_1\rangle, |u_2\rangle, \cdots, |u_n\rangle$ را به ترتیب در ستون‌هایی قرار دهیم تا ماتریس U_1 را بسازیم خواهیم داشت:

$$U_1^\dagger A U_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right),$$

که در آن A_1 ماتریسی $(n-1)\times(n-1)$ است. به طور مشابه برای این ماتریس می‌توان ماتریس یکانی V را یافت به طوری که

$$V^\dagger A V = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right).$$

حال اگر ماتریس U_2 را اینگونه تعریف کنیم

$$U_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right),$$

آنگاه این ماتریس یکانی بوده و داریم

$$U_2^\dagger U_1^\dagger A U_1 U_2 = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ \hline 0 & 0 & A_2 \end{array}\right).$$

اگر این کار را ادامه دهیم و از این نکته که ضرب ماتریس‌های یکانی، یکانی است استفاده کنیم، قضیه ثابت می‌شود.

$\square$