نظریه اطلاعات کوانتمی ۱ ترم پاییز ۱۳۹۲-۱۳۹۱
مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری

جلسه ۴

---

۱ عملگرهای خطی

مطالعه‌ی سیستم‌های خطی در رشته‌های مهندسی و غیر مهندسی اهمیت زیادی دارد. به عنوان مثال جواب‌های معادلات دیفرانسیل خطی همگن رفتاری خطی دارند (به این معنی که ترکیب خطی دو جواب، باز هم جواب معادله است). همچنین مطالعه سیستم‌های خطی در دروس سیگنال و سیستم‌ها اهمیت دارد. تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس نیز تبدیلاتی خطی می‌باشند (یعنی تبدیل فوریه‌ی مجموع دو سیگنال برابر جمع تبدیل فوریه‌های آنهاست). در جبرخطی ما با فضاهای برداری سر و کار داریم؛ در اینجا یک عملگر، بردارهای درون یک فضای برداری را به برداری در همان فضای برداری (یا یک فضای برداری دیگر) می‌نگارد.

فرض کنید $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ دو فضای برداری باشند. یک عملگر خطی به نگاشتی مانند

$$T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

گفته می‌شود که نسبت به ورودی‌هایش خطی باشد. به عبارت دیگر نگاشت T خطی است اگر برای بردارهای دلخواه $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots, |v_k\rangle\}$ و ضرایب دلخواه $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ داشته باشیم

$$T\left(\sum_i \alpha_i |v_i\rangle\right) = \sum_i \alpha_i T(|v_i\rangle).$$

معمولا بجای $T(|v\rangle)$ از نماد مختصرتر $T|v\rangle$ استفاده می‌کنیم. هنگامی که می‌گوییم که یک عملگر خطی روی یک فضای $\mathcal{V}$ تعریف شده منظور این است که یک عملگر خطی از یک فضا به خودش تعریف شده است ($T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$).

ساده ترین عملگر خطی عملگر «همانی» است که هر بردار را به خودش می‌برد.

$$I_{\mathcal{V}}|v\rangle = |v\rangle.$$

عملگر همانی روی فضای $\mathcal{V}$ را معمولا با $I_{\mathcal{V}}$ نشان می‌دهیم. زمانی که ابهامی وجود نداشته باشد ما زیرنویس $\mathcal{V}$ را حذف کرده و مختصرا I می‌نویسیم. عملگر خطی مهم دیگر «عملگر صفر» است که تمامی بردارهای فضا را به بردار صفر می‌برد. ما این عملگر را با نماد $\mathbf{0}$ نشان می‌دهیم و این خاصیت را دارد که $\mathbf{0}|v\rangle = \mathbf{0}$ برای هر بردار $|v\rangle$ در فضا.

تمرین ۱ نشان دهید هر عملگر خطی برداری صفر را به بردار صفر می‌برد.

نمونه‌ی دیگر از عملگرهای خطی عملگر دوران در صفحه و یا عملگر تصویر کردن بر روی یک خط که از مبدا گذر می‌کند است.

مثال ۲ فرض کنید که $\mathcal{V}$ یک فضای برداری مجهز به ضرب داخلی باشد و $|a\rangle \in \mathcal{V}$ را برداری دلخواه بگیرید. همچنین $\mathbb{C}$ را به عنوانی فضایی یک بعدی در نظر بگیرید. تعریف کنید $T : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$

$$T(|v\rangle) := \langle a|v\rangle = (|a\rangle, |v\rangle).$$

در این صورت T یک عملگر خطی است.

تمرین ۳ فرض کنید که $\mathcal{V}$ یک فضای برداری مجهز به ضرب داخلی باشد و $|a\rangle \in \mathcal{V}$ را برداری دلخواه به طول واحد بگیرید. تعریف کنید $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$$T(|v\rangle) = \langle a|v\rangle|a\rangle.$$

نشان دهید که T همان عملگر تصویر در راستای بردار $|a\rangle$ است.

مثال ۴ دیدیم که $M_n(\mathbb{C})$ (مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$) یک فضای برداری است. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ را ماتریس‌هایی دلخواه بگیرید و عملگر $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ را با $TX = AXB$ تعریف کنید. در این صورت T خطی است.

مثال ۵ عملگر اثر $T : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ که با $TX = tr(X)$ تعریف می‌شود یک عملگر خطی است.

در صورتی که یک عملگر خطی از فضای $\mathcal{V}$ به $\mathcal{W}$، و یک عملگر خطی دیگر S از فضای $\mathcal{W}$ به فضای $\mathcal{X}$ داشته باشیم، ترکیب این عملگرها را با نماد ST نشان می‌دهیم و آن را اینگونه تعریف می‌کنیم

$$(ST)|v\rangle := S(T(|v\rangle)).$$

همچنین جهت مختصر نویسی از نماد $ST|v\rangle$ برای نشان دادن $(ST)|v\rangle$ استفاده می‌کنیم.

مجموعه‌ی عملگرهای خطی از یک فضای $\mathcal{V}$ به فضای $\mathcal{W}$ را با

$$\mathbf{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \{T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} | \quad \text{خطی باشد } T\}$$

نمایش می‌دهیم. مجموعه عملگرهای خطی از یک فضا به خودش را با $\mathbf{L}(\mathcal{V}) = \mathbf{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ نشان می‌دهیم.

تمرین ۶ نشان جمع دو عملگر خطی، عملگری خطی است. همچنین با ضرب اسکالر در یک عملگر خطی، یک عملگر خطی به دست می‌آوریم. نتیجه بگیرید که $\mathbf{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ یک فضای برداری است.

۱.۱ فضای پوچ و فضای تصویر

برای هر عملگر خطی $T:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ داریم برد و فضای پوچ تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{برد } T \text{ (فضای تصویر } T) &= \mathrm{Im}(T) = \{T|v\rangle : |v\rangle \in \mathcal{V}\}, \\ \text{فضای پوچ } T &= \ker(T) = \{|v\rangle \in \mathcal{V} : T|v\rangle = 0\}. \end{aligned}$$

توجه کنید که $\ker T \subseteq \mathcal{V}$ و $\mathrm{Im} T \subseteq \mathcal{W}$.

تمرین ۷ ثابت کنید که برد و فضای پوچ یک عملگر خطی، خود زیرفضای برداری هستند و در نتیجه برای آنها می‌توان بعد تعریف کرد.

برای مثال برد عملگر همانی برابر کل فضا و فضای پوچ آن فقط شامل بردار صفر است. اما در مورد عملگر تصویر کردن بر روی یک خط، برد آن برابر بردارهای متعلق به آن خط، و فضای پوچ آن مجموعه‌ی بردارهای عمود بر آن خط خواهد بود.

تمرین ۸ نشان دهید که اگر تصویر بردارهای $|v_1\rangle$ و $|v_2\rangle$ تحت عملگر T یکسان باشد، حتما $|v_1\rangle - |v_2\rangle$ متعلق به فضای پوچ T است.

قضیه ۹ برای هر عملگر خطی دلخواه $T:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ داریم

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\text{بعد برد } T) + \dim(\text{فضای پوچ } T).$$

اثبات: فرض کنید که بعد فضای پوچ T برابر d باشد. برای فضای پوچ T یک پایه $|e_1\rangle, \cdots, |e_d\rangle$ در نظر بگیرید. این پایه را به پایه‌ای برای کل فضای $\mathcal{V}$ گسترش دهید تا به پایه‌ای مانند $|e_1\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ برسیم. کافی است ثابت کنیم که بردارهای

$$T|e_{d+1}\rangle, \cdots, T|e_n\rangle$$

یک پایه برای فضای برد T تشکیل می‌دهند زیرا در این صورت بعد فضای تصویر T برابر $n-d$ خواهد بود. جهت اثبات اینکه این بردارها یک پایه هستند، اول ثابت می‌کنیم که این بردارها فضای تصویر T را پوشش می‌دهند. بردار دلخواه $|v\rangle \in \mathcal{V}$ را در نظر بگیرید. این بردار را می‌توان بصورت ترکیب خطی بردارهای پایه $|e_1\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ نوشت:

$$|v\rangle = \alpha_1|e_1\rangle + \cdots + \alpha_n|e_n\rangle.$$

در این صورت چون $|e_1\rangle, \dots, |e_d\rangle \in \ker T$

$$\begin{aligned} T|v\rangle &= \alpha_1 T|e_1\rangle + \cdots + \alpha_n T|e_n\rangle \\ &= \alpha_{d+1} T|e_{d+1}\rangle + \cdots + \alpha_n T|e_n\rangle. \end{aligned}$$

ترکیب خطی‌ای از بردارهای $T|e_{d+1}\rangle, \cdots, T|e_n\rangle$ است.

حال نشان می‌دهیم بردارهای $T|e_{d+1}\rangle, \cdots, T|e_n\rangle$ مستقل خطی هستند. فرض کنید که اینگونه نباشد و

$$\beta_{d+1}T|e_{d+1}\rangle + \cdots + \beta_n T|e_n\rangle = 0.$$

در این صورت

$$T\left(\beta_{d+1}|e_{d+1}\rangle + \cdots + \beta_n|e_n\rangle\right) = 0.$$

پس

$$\beta_{d+1}|e_{d+1}\rangle + \cdots + \beta_n|e_n\rangle \in T \text{ فضای پوچ}$$

اما هر عضو فضای پوچ T ترکیب خطی $|e_1\rangle, \cdots, |e_d\rangle$ می‌باشد، پس ضرایب $\beta_1, \ldots, \beta_d$ وجود دارند به طوری که

$$\beta_{d+1}|e_{d+1}\rangle + \cdots + \beta_n|e_n\rangle = \beta_1|e_1\rangle + \cdots + \beta_d|e_d\rangle$$

که تناقض است زیرا $|e_1\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ یک پایه تشکیل می‌داد. □

تمرین ۱۰ فضای پوچ و برد عملگر خطی تعریف شده در مثال ۴ را بدست بیاورید.

راهنمایی: می‌توانید از تجزیه‌ی ماتریسی A و B که با استفاده از اعمال سطری و ستونی مقدماتی بدست آوردیم استفاده کنید.

تمرین ۱۱ فرض کنید $\mathcal{V}$ یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. نشان دهید $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ پوشاست اگر و فقط اگر فضای پوچ آن صفر باشد ($\dim kerT = 0$).